MILAN ZLOKOVIĆ
architecte
professeur à la Faculté d'Architecture
de l'Université de Belgrade

MULTIPLES DU MODULE DE BASE

ESSAI D'UNE SYSTÉMATISATION DES NOMBRES PRÉFÉRENCIELS DANS LE DOMAINE DE LA COORDINATION MODULAIRE

Belgrade, le 23 août 1961

MILAN ZLOKOVIĆ
architecte
professeur à la Faculté d'Architecture
de l'Université de Belgrade

MULTIPLES DU MODULE DE BASE

ESSAI D'UNE SYSTÉMATISATION DES NOMBRES PRÉFÉRENCIELS DANS LE DOMAINE DE LA COORDINATION MODULAIRE

Le problème des nombres entiers - multiples du module de base - consiste à choisir parmi les nombres naturels une ou plusieurs suites de nombres, suffisantes à une coordination raisonnée des dimensions dans l'industrie du bâtiment. On réduira, de cette façon, l'assortiment des différents éléments, classifiés par grandeur.

Afin de pouvoir proposer une ou plusieurs suites de préférence, il était nécessaire d'étudier les rapports qui existent entre certains termes de la suite des nombres naturels et d'établir - considérant ces rapports - les combinaisons numériques dans des intervalles de préférence.

1 PARTIES ALIQUOTES DE 24 UNITÉS

Mes recherches sont rattachées au système duodécimal. J'ai limité la suite des nombres naturels au 24^{me} terme /(A)/; ensuite j'ai précisé les parties aliquotes de 24 /(B) - (G)/ qui forment successivement des séries arithmétiques de raison 2, 3, 4, 6, 8 et 12. Le tableau synoptique d'en bas, formé par les séries /(A) - (G)/, est d'ordre préférenciel:

(A)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1o	11	12	13	14	15	16	17	18	19	2o	21	22	23	24
(B)	.	2	.	4	.	6	.	8	.	1o	.	12	.	14	.	16	.	18	.	2o	.	22	.	24
(C)	.	.	3	.	.	6	.	.	9	.	.	12	.	.	15	.	.	18	.	.	21	.	.	24
(D)	.	.	.	4	.	.	.	8	.	.	.	12	.	.	.	16	.	.	.	2o	.	.	.	24
(E)	.	.	.	.	.	6	.	.	.	.	.	12	.	.	.	.	.	18	.	.	.	.	.	24
(F)	.	.	.	.	.	.	.	8	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	24
(G)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	12	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	24

2 NOMBRES PREMIERS ET MULTIPLES DE 6

La série arithmétique des nombres impairs (A) - jusqu'au terme 23 - est formée en majorité par de nombres premiers (B):

(A)	1	.	3	.	5	.	7	.	9	.	11	.	13	.	15	.	17	.	19	.	21	.	23	.
(B)	1	2	3	.	5	.	7	.	.	.	11	.	13	.	.	.	17	.	19	.	.	.	23	.

Il était, d'après mon avis, utile d'analyser les qualités numériques de cette suite singulière.

Dans la suite des nombres premiers, je me suis arrêté au 13^{me} terme 37:

1 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37

et j'ai divisé cette suite limitée en quatre groupes de quatre termes; les termes 1, 5, 13 et 23 sont au premier rang, les termes 5, 13, 23 et 37 au quatrième rang de chaque groupe.

Nous aboutissons - par l'addition successive de deux termes voisins et par la répétition de ce procédé en vue d'obtenir une disposition numérique triangulaire - à quatre triangles A, B, C et D:

```
1   2   3   5          5   7  11  13
  3   5   8             12  18  24
    8  13                 30  42
A    21               B     72

                      13  17  19  23        23  29  31  37
                        30  36  42            52  60  68
                          66  78                112 128
                      C    144              D    240
```

Il est aisé à constater que les nouveaux termes correspondent:

- en A aux sept premiers termes de la série de Fibonacci:
  1 2 3 5 8 13 21 . . .

- en B et C multiples de 6 (sont soulignés les trois termes qui se répètent):

  12 18 24 <u>3o</u> <u>36</u> <u>42</u> 66 72 78 144

  où 12, 18, 24, 36 et 72 sont parties aliquotes de 144, carré de 12;

- en D aux multiples de 4:

  52 6o 68 112 128 24o.

En outre, on observe que l'addition de deux nombres premiers symétriques par rapport aux quatre termes des triangles B, C et D ainsi que deux fois six termes des triangles B et C, ayant au premier rang alternativement 5 et 7, donne des multiples de 6:

5 7 11 13
18

5 7 11 13 17 19
24

13 17 19 23
36

7 11 13 17 19 23
3o

23 29 31 37
6o

Les suites de six termes, disposées en deux rangées et additionnées, aboutissent à une série arithmétique de raison 6:

5	7	11	13	17	19
7	11	13	17	19	23
12	18	24	3o	36	42

Nous pouvons dire, par conséquent, qu'une loi déterminée réside dans un intervalle défini de la suite des nombres premiers; cette loi se manifeste par les sommes de deux nombres premiers symétriques, multiples de 6 - encore une petite preuve en faveur du module de projet de 6M !

3 SÉRIES RÉCURRENTES

La série de Fibonacci est une série récurrente.

Chaque terme d'une série récurrente est défini en général par la somme de deux termes qui le précèdent:

$$a,\quad b,\quad a+b,\quad a+2b,\quad 2a+3b,\quad 3a+5b,\quad 5a+8b,\ \text{etc.}$$

sous condition $a < b$ et désigné par $r(\frac{b}{a})$.

Dans la limite, le rapport de deux termes voisins de chaque série récurrente correspond à la section d'or.

La série de Fibonacci est la série additive de départ vu qu'elle est basée sur $a = b = 1$ ou $a = 1$, $b = 2$:

$$r(\tfrac{1}{1}) \quad \text{ou} \quad r(\tfrac{2}{1}).$$

Les séries récurrentes $r(\frac{2}{1})$, $r(\frac{3}{1})$, $r(\frac{4}{1})$,.......$r(\frac{11}{1})$ sont exposées dans le tableau synoptique (A) - (J):

(A)	1	2	3	.	5	.	.	8	.	.	.	.	13	.	.	.	.	.	.	.	21	.	.	.
(B)	1	.	3	4	.	.	7	.	.	.	11	.	.	.	.	.	.	18	.	.	.	.	.	.
(C)	1	.	.	4	5	.	.	.	9	.	.	.	.	14	.	.	.	.	.	.	.	.	23	.
(D)	1	.	.	.	5	6	.	.	.	.	11	.	.	.	.	.	17	.	.	.	.	.	.	.
(E)	1	.	.	.	.	6	7	.	.	.	.	.	13	.	.	.	.	.	.	20	.	.	.	.
(F)	1	.	.	.	.	.	7	8	.	.	.	.	.	.	15	.	.	.	.	.	.	.	23	.
(G)	1	.	.	.	.	.	.	8	9	.	.	.	.	.	.	.	17	.	.	.	.	.	.	.
(H)	1	.	.	.	.	.	.	.	9	10	.	.	.	.	.	.	.	.	19	.	.	.	.	.
(I)	1	.	.	.	.	.	.	.	.	10	11	.	.	.	.	.	.	.	.	.	21	.	.	.
(J)	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	11	12	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	23	.

Nous rencontrons ici, parmi les différents termes, tous les termes de la suite des nombres premiers.

Séparément, j'ai disposé les termes des séries (A) - (J) en colonnes:

(A)	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
(B)	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	
(C)	1	4	5	9	14	23	37	60			
(D)	1	5	6	11	17	28	45				
(E)	1	6	7	13	20	33					
(F)	1	7	8	15	23						
(G)	1	8	9	17	26						
(H)	1	9	10	19	29						
(I)	1	10	11	21	32						
(J)	1	11	12	23	35						

Chaque colonne représente une série arithmétique. Les raisons (différences) entre les termes de chaque colonne forment la série initiale de Fibonacci.

Le caractère additif des séries récurrentes en connexion avec le nombre d'or implique souvent leur application dans les spéculations numériques de composition.

4 LE "MODULOR" ET LES SÉRIES RÉCURRENTES $r\binom{3}{1}$ ET $r\binom{6}{2}$

Les séries susmentionnées sont indiquées en (A) et (B):

(A) 1 . 3 4 . . 7 . . . 11 . . . . . . 18 . . . .
(B) . 2 . . . 6 . 8 . . . . . 14 . . . . 22 . .

Sur les séries $r\binom{3}{1}$ et $r\binom{6}{2}$ s'appuie ma proposition concernant les séries "rouge" et "bleue" de M. Le Corbusier. (voir mon étude: "Intégration du "Modulor" dans le Système Modulaire International" "arhitektura urbanizam" 6/1960, Belgrade)

Les termes de la série de Fibonacci, adoptés par l'auteur du "Modulor":

$$\frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{2} \quad 4 \quad \frac{13}{2} \quad \frac{21}{2} \quad 17 \quad \frac{55}{2} \quad \frac{89}{2} \quad 72 \ \ldots$$

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \quad 34 \quad 55 \quad 89 \ \ldots\ldots$$

sont substitués par les termes de la série récurrente voisine $r\binom{3}{1}$ et des ses doubles $r\binom{6}{2}$:

$$1 \quad 3 \quad 4 \quad 7 \quad 11 \quad \underline{18} \quad 29 \quad 47 \quad 76 \quad 123 \ \ldots$$

$$2 \quad 6 \quad 8 \quad 14 \quad \underline{22} \quad 36 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Parmi ces termes, supposés comme multiples du module de base, il suit:

18M = 1,80m pour la hauteur de l'homme,

11M = 1,10m pour celle du sol au nombril et

22M = 2,20m debout avec le bras levé.

De cette façon, l'intégration du "Modulor" dans le "Système Modulaire International" est rendue possible.

5 NOMBRES TRIANGULAIRES ET NOMBRES CARRÉS

Chaque terme de la suite des nombres "triangulaires" est déterminé par l'addition successive de 1, 2, 3, ... n termes de la suite des nombres naturels:

$$n\,\frac{(n-1)}{2} + n = n\,\frac{(n+1)}{2}$$

ce qui est exposé dans la suivante disposition numérique et complété - à titre de comparaison - par les unités correspondentes en forme d'un triangle:

1 = 1	o
1+2 = 3	o o
1+2+3 = 6	o o o
1+2+3+4 = 1o	o o o o
1+2+3+4+5 = 15	o o o o o
1+2+3+4+5+6 = 21	o o o o o o

La suite des nombres triangulaires:

1	3	6	1o	15	21	28	36	45	55	66	78
	2	3	4	5	6	7	8	9	1o	11	12

est une série arithmétique de 2^{me} ordre à croissance "gnomonique" et se distingue par le fait que la plupart des termes sont des multiples de 3,

On procède analogiquement pour la suite des nombres carrés qu'on développe à l'aide de la suite des nombres impairs par l'addition successive de 1, 2, 3, ... n termes, parallèlement comparés aux unités correspondantes, formées en triangle:

1 = 1	o
1+3 = 4	o o o
1+3+5 = 9	o o o o o
1+3+5+7 = 16	o o o o o o o

Chaque terme n de cette série est déterminé par

$$(n-1)^2 + (2n-1) = n^2$$

La suite des nombres carrés

1 4 9 16 25 36 49 64 81 1oo 121 144 ....

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23

est aussi série arithmétique de 2^{me} ordre à croissance gnomonique.

Cette série des nombres naturels "au carré" engendre un groupe do proportions géométriques de forme

$$a^2 : a.b = a.b : b^2$$

- proportion que j'ai nommé "la proportion carrée".

Le tableau synoptique en bas explique le raccordement entre deux nombres carrés et leur moyenne géométrique et inversement:

12	24	36	48	6o	72	84	96	1o8	12o	132	144
11	22	33	44	55	66	77	88	99	11o	121	
1o	2o	3o	4o	5o	6o	7o	8o	9o	1oo		
9	18	27	36	45	54	63	72	81			
8	16	24	32	4o	48	56	64				
7	14	21	28	35	42	49					
6	12	18	24	3o	36						
5	1o	15	2o	25							
4	8	12	16								
3	6	9									
2	4										
1											

Exemples:

1 : 2 = 2 : 4

6 : 9 = 4 : 6.

9 : 21 = 21 : 49

4o : 64 = 25 : 4o

16 : 36 = 36 : 81

54 : 81 = 36 : 54

Les moyennes géométriques sont disposées en rangées et colonnes en séries arithmétiques de raison 1, 2, 3, ... 12.

En (A) et (B) - dans l'intervalle de 24 unités - sont inscrits les termes qui correspondent aux nombres triangulaires et carrés.

(A) 1 . 3 . . 6 . . . 1o . . . . 15 . . . . . 21 . . .

(B) 1 . . 4 . . . . 9 . . . . . . 16 . . . .

6 RELATIONS ENTRE NOMBRES NATURELS, TRIANGULAIRES, CARRÉS ET CUBES

Ces relations se manifestent de la suivante manière:

- dans la série des nombres triangulaires, les différences entre deux termes successifs forme la suite des nombres naturels et, d'autre part, leurs sommes, la série des nombres carrés:

soustraction			2		3		4		5		6		7		8		....	nombres naturels
	1			3		6		10		15		21		28		36	....	nombres triangulaires
addition:			4		9		16		25		36		49		64		....	nombres carrés

- la soustraction des nombres carrés et triangulaires selon leur rang répète ces derniers, avancés d'un rang:

1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	...
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	...
0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	...

- l'addition des nombres naturels et carrés - selon leur rang - aboutit aux nombres triangulaires doublés:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	...	
(2	6	12	20	30	42	56	72	90	110	132	156	...)	: 2 =
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	...	

- les termes de la série des cubes, additionnés successivement en partant de l'unité, déterminent les carrés de la série des nombres triangulaires:

1^3	2^3	3^3	4^3	5^3	6^3	...
1	8	27	64	125	216	..
	1	9	36	100	225	...
1	9	36	100	225	441	...
1^2	3^2	6^2	10^2	15^2	21^2	...

7 INTERVALLES HARMONIQUES

Les intervalles simples, successivement redoublés:

$$\frac{1}{1}\quad \frac{9}{8}\quad \frac{5}{4}\quad \frac{4}{3}\quad \frac{3}{2}\quad \frac{5}{3}\quad \frac{15}{8}\quad \frac{2}{1}$$

$$\frac{9}{4}\quad \frac{5}{2}\quad \frac{8}{3}\quad \frac{3}{1}\quad \frac{10}{3}\quad \frac{15}{4}\quad \frac{4}{1}$$

$$\frac{9}{2}\quad \frac{5}{1}\quad \frac{16}{3}\quad \frac{6}{1}\quad \frac{20}{3}\quad \frac{15}{2}\quad \frac{8}{1}\quad \text{etc.}$$

et réduits au dénominateur 24 (au plus petit commun multiple), déterminent une suite de numérateurs entre 24 et 48 et leurs doubles successifs:

24	27	30	32	36	40	45	48
	54	60	64	72	80	90	96
	108	120	128	144	160	180	192 etc.

Ainsi on vient d'établir la suite harmonique (musicale) en nombres entiers, avec 24 en tête de la suite. Elle est, d'ailleurs, la suite élémentaire de préférence des périodes classiques.

8 MOYENNES HARMONIQUES

La proportion harmonique $\frac{c-b}{b-a} = \frac{c}{a}$

par l'intermédiaire de sa moyenne $m_h = b = \frac{2ac}{a+c}$

a contribué à former une suite de triples, disposés en colonnes et répétés après leur transformation en nombres entiers:

	a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$m_h=$	b	$\frac{4}{3}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{24}{7}$	$\frac{40}{9}$	$\frac{60}{11}$	$\frac{84}{13}$	$\frac{112}{15}$	$\frac{144}{17}$	$\frac{180}{19}$	$\frac{220}{21}$	$\frac{264}{23}$	$\frac{312}{25}$
	c	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	a'	3	10	21	36	55	78	105	136	171	210	253	300
$m_h=$	b'	4	12	24	40	60	84	112	144	180	220	264	312
	c'	6	15	28	45	66	91	120	153	190	231	276	325

Les suites a', b', c', sont engendrées par la série des nombres triangulaires:

$$\begin{matrix} 3 & & 10 & & 21 \\ 6 & \nearrow & 15 & \nearrow & 28 \end{matrix} \quad (4,\ 12,\ 24,\ 40,\ 60,\ ..) : 4 = 1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21...$$

9 TRIPLES PYTHAGORIQUES

D'après le théorème de Pythagore

$$x^2 + y^2 = z^2$$

on aura le triple x, y, z en nombres entiers sous les conditions suivantes:

$$x = n(2m + n) \qquad m \;\ldots\; \text{nombre entier}$$
$$y = 2m(m + n) \qquad n \;\ldots\; \text{nombre impair}$$
$$z = x + 2m^2 = y + n^2$$

	m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n = 1	x	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
	y	4	12	24	40	60	84	112	144	180	220	264	312
	z	5	13	25	41	61	85	113	145	181	221	265	313
n = 3	x	15	21	(27)	33	39	(45)	51	57	(63)	69	75	(81)
	y	8	20	(36)	56	80	(108)	140	176	(216)	260	308	(360)
	z	17	29	(45)	65	89	(117)	149	185	(225)	269	317	(369)
n = 5	x	35	45	55	65	(75)	85	95	105	115	(125)	135	145
	y	12	28	48	72	(100)	132	168	208	252	(300)	352	408
	z	37	53	73	97	(125)	157	193	233	277	(325)	367	423

Dans le tableau ci-devant sont exposés les triples pythagoriques en trois groupes, m = 1, 2, 3, ..., 12 et n = 1, 3, 5.

Chaque triple est caractérisé par des termes, multiples de 3, 4 ou 5, toujours premiers entre eux. Les triples entre parenthèses du 2^me^ et 3^me^ groupe sont multiples des triples successifs du 1^er^ groupe. Les suites x sont des séries arithmétiques de raison 2, 6 et 10, celles de y et z des séries arithmétiques de 2^me^ ordre.

Il y a cinq triples (A) qui, raccordés par 24 - terme commun entre eux (B) - sont donnés ci-dessous:

	(A)				(B)		
	3	4	5		18	24	30
	15	8	17		45	24	51
	5	12	13		10	24	26
	35	12	37		70	24	74
	7	24	25		7	24	25

Ces triples figurent très souvent dans les combinaisons numériques de mise en proportion des parties d'un ensemble architectonique. On doit souligner aussi l'importance du triple 2o, 21, 29, qui, en planimétrie, est générateur d'un carré apparent.

1o SÉRIES GÉOMÉTRIQUES

Les termes initiaux des séries géométriques fondamentales de raison 2 et 3 sont placés ci-dessous:

1 2 . 4 . . . 8 . . . . 16 . . . .
1 . 3 . . . . . 9 . . . .

Les quatre premiers termes de chacune de ces séries déterminent la double tétractys de Platon:

1
2 3
4 9
8 27

qui se développe, par addition triangulaire successive, en deux séries géométriques de raison 3 et 4 (A); en substituant, dans l'arrangement triangulaire, la série de raison 2 avec celle de raison 4, on obtient, de façon analogue, la série de raison 5 (B):

	27	9	3	1	4	16	64		64	16	4	1	5	25	125
	18	6	2		3	12	48		48	12	3		4	2o	1oo
	12	4				9	36		36	9				16	8o
(A)	8						27	(B)	27						64

Dans la disposition numérique (C) sont systématisées, en même temps, les séries géométriques de raison 2 et 4 en sens vertical, de raison 3 et 5 en sens oblique - le tout échafaudé sur le triple pythagorique 3, 4, 5.

(C)

			1			
			2			
		3	4	5		
		6	8	1o		
	9	12	16	2o	25	
	18	24	32	4o	5o	
27	36	48	64	8o	1oo	125

Cet arrangement envisage la possibilité d'entrelacer trois modules de base apparentés - supposons: 3", 4" et 5".

11 LE CYCLE DES PROPORTIONS CLASSIQUES

Dans le tableau synoptique ci-dessous sont exposées les proportions classiques, représentés par dix types, augmentés d'un onzième de mon invention.

	c b a	a	b	c	a'	b'	c'
P_I	$\frac{c-a}{b-a} = \frac{c}{c}$	1	2	3	12	24	36
P_{II}	$\frac{c-b}{b-a} = \frac{c}{b} = \frac{b}{a}$	1	2	4	12	24	48
P_{III}	$\frac{c-b}{b-a} = \frac{c}{a}$	2	3	6	12	18	36
P_{IV}	$\frac{b-a}{c-b} = \frac{c}{a}$	3	5	6	12	2o	24
P_V	$\frac{b-a}{c-b} = \frac{b}{a}$	2	4	5	12	24	3o
P_{VI}	$\frac{b-a}{c-b} = \frac{c}{b}$	1	4	6	12	48	72
P_{VII}	$\frac{c-a}{b-a} = \frac{c}{a}$	6	8	9	12	16	18
P_{VIII}	$\frac{c-a}{c-b} = \frac{c}{a}$	6	7	9	12	14	18
P_{IX}	$\frac{c-a}{b-a} = \frac{b}{a}$	4	6	7	12	18	21
P_X	$\frac{c-a}{c-b} = \frac{b}{a}$	3	5	8	12	2o	32
P_{XI}	$\frac{c-a}{c-b} = \frac{c}{b}$	3	4	6	12	16	24

Il a été possible de préciser les termes a, b, c, de chaque type de proportion par trois nombres à un chiffre et de comparer ces triples par l'intermédiaire du plus petit commun multiple 12.

Les données de ce tableau sont très instructives. D'une part, elles nous révèlent la loi du "Nombre" qui est intégrée dans les variations proportionnables à un chiffre; d'autre part, ces proportions déterminent une suite de douze termes, tous multiples de 2; huit termes sont multiples de 3 et 4, sept termes de 6 et quatre de 12: $\overline{\underline{12}}$ 14 $\overline{16}$ $\underline{18}$ $\overline{2o}$ $\underline{21}$ $\overline{\underline{24}}$ $\underline{3o}$ $\overline{32}$ $\overline{\underline{36}}$ $\overline{\underline{48}}$ $\overline{\underline{72}}$

D'après mon avis, cette suite résout d'une manière convenable l'enchaînement des proportions d'un édifice à l'aide des séries arithmétiques de raison 2, 3 et 4.

12 VALEURS RATIONNELLES APPROXIMATIVES DES NOMBRES IRRATIONNELS

On rencontre dans les "tracés régulateurs" des grandeurs incommensurables, basées sur les polygones réguliers:

A - de 4 et 8 cotés - système $\sqrt{2}$ ou de la "quadrature";
A'- de 3 et 6 cotés - système $\sqrt{3}$ ou de la "triangulature";
A"- de 5 et 1o cotés - système ϕ ou de la "section dorée".

Les nombres irrationnels $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont aussi les moyennes proportionnelles des séries géométriques de raison 2 et 3. Ces nouvelles séries de raison $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ (A et A') se transforment en séries rationnelles de valeur approximative en remplacant $\sqrt{2}$ par $\frac{7}{5}$ et $\sqrt{3}$ par $\frac{7}{4}$ (B, B' et C, C'):

A	1	$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	4	$4\sqrt{2}$	8	$8\sqrt{2}$	16	....
B	1	$\frac{7}{5}$	2	$\frac{14}{5}$	4	$\frac{28}{5}$	8	$\frac{56}{5}$	16	....
C	5	7	1o	14	2o	28	4o	56	8o	....
A'	1	$\sqrt{3}$	3	$3\sqrt{3}$	9	$9\sqrt{3}$	27	$27\sqrt{3}$	81	....
B'	1	$\frac{7}{4}$	3	$\frac{21}{4}$	9	$\frac{63}{4}$	27	$\frac{189}{4}$	81	....
C'	4	7	12	21	36	63	1o8	189	324	....

Il est évident que le nombre 7 et ses multiples sont ceux qui ont rendu possible l'approximation rationnelle de valeurs des systèmes $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

Autrefois, le nombre 7 était nombre "sacré" - aujourd'hui il est simplement la somme 3 + 4. Notons aussi que 3+4+5 = 7+5 = 12 correspond a l'unité duodécimale, issue du triple pythagorique élémentaire 3, 4, 5 - générateur primordial de l'angle droit.

A coté de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ nous avons les valeurs irrationnelles de $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ et $\sqrt{5} = \phi + \frac{1}{\phi}$, commensurables par l'intermédiaire de la série de Fibonacci.

Ces approximations sont exprimées par les suivants rapports (ou "nombres-mesure"):

$$\frac{\sqrt{2}}{1} \approx \frac{7}{5} = \frac{14}{1o} \approx \frac{1o}{7} = \frac{2o}{14} \approx \frac{17}{12} \approx \frac{24}{17}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} \approx \frac{7}{4} = \frac{14}{8} = \frac{21}{12} \approx \frac{12}{7} = \frac{24}{14}$$

$$\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx \frac{8}{5} = \frac{16}{1o} = \frac{24}{15} \approx \frac{13}{8} \approx \frac{21}{13} \qquad \phi + \frac{1}{\phi} = \frac{\sqrt{5}}{1} \approx \frac{9}{4} = \frac{18}{8} \approx \frac{2o}{9}$$

13 COMBINAISONS ADDITIONNÉES DE DEUX NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX

On peut réaliser à l'aide de deux nombres entiers, premiers entre eux, n'importe quel autre nombre N de forme $x.a + y.b$ (x, y, nombres entiers) au-dessus de $(a - 1)(b - 1)$; l'égalité $N = (a - 1)(b - 1)$ est "critique", c.à.d. que sous ce nombre seulement $(\frac{N}{2} - 1)$ combinaisons de a et b sont possibles.

À titre de comparaison, j'ai appliqué le théorème ci-devant à trois groupes de deux nombres:

A/	3, 5 ...	$(3-1)(5-1) = 8$	$\frac{N}{2} - 1 = 3$
	4, 5 ...	$(4-1)(5-1) = 12$	$= 5$
B/	5, 6 ...	$(5-1)(6-1) = 20$	$= 9$
	5, 7 ...	$(5-1)(7-1) = 24$	$= 11$
	6, 7 ...	$(6-1)(7-1) = 30$	$= 14$
C/	5, 8 ...	$(5-1)(8-1) = 28$	$= 13$
	5, 9 ...	$(5-1)(9-1) = 32$	$= 15$

Dans les diagrammes numériques en continuation, les suites des combinaisons possibles au-dessous du nombre "critique" sont soulignées par un encadrement; les séries arithmétiques de raison a sont disposées en sens horizontal, de raison b en sens oblique et de raison b-a en sens vertical:

3	6	9	12
5	8	11	14
	10	13	16
		15	18
			20

4	8	12	16
5	9	13	17
	10	14	18
		15	19
			20

5	10	15	20	25
6	11	16	21	26
	12	17	22	27
		18	23	28
			24	29
				30

5	10	15	20	25
7	12	17	22	27
	14	19	24	29
		21	26	31
			28	33
				35

6	12	18	24	30
7	13	19	25	31
	14	20	26	32
		21	27	33
			28	34
				35

5	10	15	20	25	30
8	13	18	23	28	33
	16	21	26	31	36
		24	29	34	39
			32	37	42
				40	45
					48

5	10	15	20	25	30
9	14	19	24	29	34
	18	23	28	33	38
		27	32	37	42
			36	41	46
				45	50
					54

Le tableau synoptique ci-dessous donne les combinaisons possibles entre a = 5, 6, 7, 8 et b= 6, 7, 8, 9, limitées à l'intervalle de 10 à 20 - celui-ci nombre "critique" de la suite initiale, formée par les combinaisons de 5 et 6:

	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N = (5-1)(6-1) = 20	10	11	12	.	.	15	16	17	18	.	20
N = (5-1)(7-1) = 24	10	.	12	.	14	15	.	17	.	19	20
N = (6-1)(7-1) = 30	.	.	12	13	14	.	.	.	18	19	20
N = (5-1)(8-1) = 28	10	.	.	13	.	15	16	.	18	.	20
N = (5-1)(9-1) = 32	10	.	.	.	14	15	.	.	18	19	20
N = (7-1)(8-1) = 42	.	.	.	.	14	15	16	.	.	.	.
N = (7-1)(9-1) = 48	.	.	.	.	14	.	16	.	18	.	.
N = (8-1)(9-1) = 56	.	.	.	.	.	.	16	17	18	.	.

Il suit qu'à l'aide de <u>5, 6 et 7</u> on réalise avec un ou deux de ces trois nombres - <u>chaque nombre au-dessus de 10</u> !

Appliquée à l'industrie du bâtiment, cette particularité des nombres 5, 6 et 7 résout en principe la réduction des éléments préfabriqués de grandeur moyenne à trois dimensions modulaires seulement.

Voici un exemple pratique: un panneau de 12M de largeur est coupé alternativement en deux parties de 6M+6M et 5M+7M.

Nous aurons pour une cloison de 27M de longueur (deux nombres "critiques" sont dépassés) - deux combinaisons: (3.5M) + (2.6M) et (4.5M) + (1.7M); d'autre part, pour une longueur de 41M (tous les nombres "critiques" sont dépassés) - trois combinaisons: (7.5M) + (1.6M), (4.5M) + (3.7M) et (1.6M) + (5.7M).

Quand le coefficient des panneaux de 5M, 6M ou 7M est nombre <u>pair</u>, un remplacement par des panneaux de <u>double</u> largeur sera possible.

14 LE MODULE DE BASE 1o cm ≈ 4" COMPARÉ À CEUX DE 12,5cm ≈ 5" ET 7,5cm ≈ 3"

La réunion du TC/59 de l'ISO à Paris en 1957, a recommandé l'adoption d'un module de base international de 1ocm ≈ 4" dans bâtiment. La proposition a été acceptée à l'unanimité. C'est en Allemagne seulement que le module de 12,5cm est en vigueur. D'autre part, en Angleterre, quoique le module de 4" soit officiellement reconnu, on rencontre encore beaucoup d'adhérents du module de base de 3" - le "palme" moderne. Parmi eux, c'est justement M. T.L.Carhart-Harris qui intercède en sa faveur ("The Co-ordination of Dimensions in Building", The Builder, 1961.)

Ci-dessous, en deux tableaux, j'ai mis en évidence les liens entre les multiples des modules de base 1o cm = 1M, 12,5cm = 1M' et 7,5cm = 1M" jusqu'à 6o" ≈ 15M = 12M' = 2oM" = 15ocm.

	M	cm	cm	M'	
6o"	15	15o	15o	12	6o"
56"	14	14o			
			137,5	11	55"
52"	13	13o			
			125	1o	5o"
48"	12	12o			
			112,5	9	45"
44"	11	11o			
4o"	1o	1oo	1oo	8	4o"
36"	9	9o			
			87,5	7	35"
32"	8	8o			
			75	6	3o"
28"	7	7o			
			62,5	5	25"
24"	6	6o			
2o"	5	5o	5o	4	2o"
16"	4	4o			
			37,5	3	15"
12"	3	3o			
			25	2	1o"
8"	2	2o			
			12,5	1	5"
4"	1	1o			

	M	cm	M"
6o"	15	15o	2o
57"	14 1/4	142,5	19
54"	13 1/2	135	18
51"	12 3/4	127,5	17
48"	12	12o	16
45"	11 1/4	112,5	15
42"	1o 1/2	1o5	14
39"	9 3/4	97,5	13
36"	9	9o	12
33"	8 1/4	82,5	11
3o"	7 1/2	75	1o
27"	6 3/4	67,5	9
24"	6	6o	8
21"	5 1/4	52,5	7
18"	4 1/2	45	6
15"	3 3/4	37,5	5
12"	3	3o	4
9"	2 1/4	22,5	3
6"	1 1/2	15	2
3"	o 3/4	7,5	1

15 LA SÉRIE DES DIMENSIONS MODULAIRES DE PRÉFÉRENCE DE T.KURENT (YU)

M. T.Kurent, dans sa thèse de doctorat:
"Le choix de dimensions modulaires de préférence appliquées dans l'industrie du bâtiment", Ljubljana, 1960, propose une suite de préférence, issue de l'enchaînement de trois modules de base: 7,5cm = 3", 10 cm = 4", 12,5cm = 5"

Afin de systématiser les dimensions des différents matériaux et éléments, les termes de cette série sont déterminés par des coefficients K (facteurs numériques) du module de base, successivement exprimés en mm, cm, dm et m, c.à.d. en $\frac{M}{100}$, $\frac{M}{10}$, M et 10M.

J'ai donné en bas cette série de structure décimale en trois dispositions différentes - la dernière donne les termes en nombres entiers.

K x mm cm dm m		
0,25		
0,5		
0,75		
1		
1,25		
1,5		
.		
2		
2,25		
2,5	5	10
.		
3	6	12
.		
.		
3,75	7,5	15
4	8	
.		
4,5	9	
.		
5	10	20

0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	.	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{2}$
$\frac{5}{2}$	.	3	.	.	$\frac{15}{4}$	4	.	$\frac{9}{2}$	.	5
5	.	6	.	.	$\frac{15}{2}$	8	.	9	.	10
10	.	12	.	.	15	.	.	.	.	20

0	1	2	3	4	5	6	.	8	9	10
10	.	12	.	.	15	16	.	18	.	20
20	.	24	.	.	30	32	.	36	.	40
40	.	48	.	.	60	.	.	.	.	80

Les termes en nombres entiers ci-devant sont nombres quadruples par rapport à l'unité, c.à.d. le module de base commun aux trois systèmes correspond à $\frac{M}{4}$ = 2,5cm ≈ 1".

La proposition de M. Kurent d'amalgamer les trois systèmes susmentionnés dans une suite unique représente une contribution utile aux études ultérieurs sur le choix raisonné de nombres préférenciels.

16 LE SYSTÈME DES SÉRIES PRÉFÉRENTIELLES DE J.WASSERMANN (URSS)

L'auteur, dans un diagramme de son étude sur ce sujet ("Arhitektura SSSR" 1o/1959, Moscou), a porté le domaine modulaire à 13 x 12m = 156M, divisé en quatre séries arithmétiques successives de raison 1 de 1M à 12M, de raison 2 de 12M à 36M, de raison 4 de 36M à 84M et de raison 6 de 84M à 156M; l'intervalle du module "agrandi" c.à.d. du module de projet de 2M, 4M et 6M correspond à trois zones distinctes.

Le suivant tableau synoptique - d'après ma notation - explique les propositions de M. Wassermann:

M	o	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1o	11	12		n x 1M
M	12	14	16	18	2o	22	24	26	28	3o	32	34	36	1e zone	n x 2M
M	36	4o	44	48	52	56	6o	64	68	72	76	8o	84	2e zone	n x 4M
M	84	9o	96	1o2	1o8	114	12o	126	132	138	144	15o	156	3e zone	n x 6M

Ma proposition consiste, par rapport à ce système, de remplacer la série arithmétique de raison 4 avec celle de raison 3, ce qui donne 72M comme terme final de la 2me zone et, par conséquent, 144M devient le terme final du domaine modulaire.

M	o	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1o	11	12		n x 1M
M	12	14	16	18	2o	22	24	26	28	3o	32	34	36	1e zone	n x 2M
M	36	39	42	45	48	51	54	57	6o	63	66	69	72	2e zone	n x 3M
M	72	78	84	9o	96	1o2	1o8	114	12o	126	132	138	144	3e zone	n x 6M

On aboutit, de cette façon, à un système numérique plus serré et clairement déterminé par le rapport des termes finals de chaque rangée: 12 : 36 : 72 : 144 = 1 : 3 : 6 : 12
au lieu de: 12 : 36 : 84 : 156 = 1 : 3 : 7 : 13

Un compromis entre les deux propositions sera réalisé si on interpole dans la 2me zone les six multiples de 4, c.à.d. 4o, 44, 52, 56, 64 et 68 - termes qui ne figuront pas dans mon tableau.

M	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
M	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	1^e zone n x 2M
M	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69	72	2^e zone n x 3M
M		40	44			52	56			64	68			n x 4M
M	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138	144	3^e zone n x 6M

17 PROPOSITION DE L'AEP PHASE II
SUR LE CHOIX DE GAMMES DIMENSIONNELLES

M. Bruce Martin, dans son étude - "Scales of Sizes" (Communiqué IMG n° 4/ juillet 1960) fait ressortir - quand il traite la question des gammes dimensionnelles - trois propositions pour la solution de ce problème: (a) le "Modulor", (b) le système des séries préférentielles de Wassermann, URSS et (c) les multiples du module de base de 3M, 5M ou 6M, avec 30M en tête de ces séries ainsi que les sub-multiples de $\frac{M}{4}$ jusqu'à 2M, recommandés par l'AEP dans son Projet 174, Phase II.

J'ai essayé de systématiser les gammes de l'AEP que je donne ci-dessous:

	M	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	2							n x $\frac{1}{4}$M
	M	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	n x 1M
	M	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
	M	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69	72	n x 3M
ou	M	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	n x 5M
	M	30	36	42	48	54	60	66	72								
ou	M		72	78	84	90	96	102	108	....							n x 6M
	M		108	114	120	126	132	138	144								

Le caractère indécis de ces gammes, la multitude des termes admis, le choix libre entre les modules de projet de 3M, 5M et 6M - représentent une solution de compromis et, par l'intermédiaire de 5M, une concession de convenance au système décimal et, par déduction, au système octométrique.

18 PROPOSITIONS ULTÉRIEURES À PROPOS DE GAMMES DIMENSIONNELLES

La "Note à propos des gammes de dimensions" de M. G. Blachère (Communiqué n° 11, IMG, oct. 196o) ainsi que la "Note sur le choix des dimensions des éléments de la construction", préparée par: CSTB, Paris, en collaboration avec CESE, Milan; IB, Hannover et INL, Bruxelles (communiqué n° 12, IMG, oct. 196o) - se référant à la question de gammes dimensionnelles, contiennent les suivantes suggestions:

(A)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1o	11	12		en général
(B)	3	6	9	12	15	18	21	24	27	3o	33	36	...	en sens
(C)	6	12	18	24	3o	36	42	48	54	6o	66	72	...	horizontal
(D)	2	4	6	8	1o	12	14	16	18	2o	22	24		en sens
(E)						25	26	27	28	3o	32	36	...	vertical

Sont données pour les grands éléments: les dimensions horizontales en (B) et (C), verticales en (D) et (E), la dimension 27M pour les hauteurs de sol à sol seulement. Les multiples de 6M sont de préférence.

M. L.Bergvall, dans son rapport: "Conclusions suggérées et discutées à la réunion de l'IMG à Copenhaque, 9-11 nov. 196o" (Communiqué n° 26a, IMG, juillet 1961), résume le point de vue des membres présents; d'ailleurs, M. Bergvall remarque qu'en majorité on était d'accord que les séries - n x 1M en sens horizontal et vertical, n x 3M et parfois limitées à n x 6M en sens horizontal ainsi que 2 x 2M en sens vertical - étaient suffisantes de satisfaire aux exigences d'une coordination dimensionnelle raisonnée.

Il faut dire que ce sont justement les séries exposées dans le tableau en haut. C'est, en réalité, le consentement de la réunion à la proposition des experts de Paris, Milan, Hannover et Bruxelles.

Des analogies avec le tableau d'en haut on peut observer en étudiant le rapport du prof S.Janicki: "Methods of Choosing Building Part Sizes" (Communiqué n° 16, IMG, nov.196o).

Sont proposées les gammes suivantes:

(A)	M	60	120	180	240	300	360	....		sans limite horizontale	-
(B)	M	30	60	90	120	150	180			limite horizontale	180M
(C)	M	15	30	45	60	75	90	105	120	limite horizontale	120M
(D)	M	12	24	36	48	60	72			limite horizontale sans limite verticale	72M
(E)	M	6	12	18	24	30	36	....			
		42	48	54	60	66	72				
(F)	M	3	6	9	12	15	18	....		limite horizontale	36M
		21	24	27	30	33	36			limite verticale	36M
(G)	M	2	4	6	8	10	12	....		limite	36M
(H)	M	1	2	3	4	5	6	....		limite	12M
(I)	M	1/2	1	3/2	2	5/2	3	....		limite	6M
(J)	M	1/5	2/5	3/5	4/5	1	6/5	....		limite	3M
(K)	M	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	....		limite	$\frac{3}{2}$M

Le tableau ci-devant a été amplifié par les multiples des modules de projet de 15M, 30M et 60M ainsi que par ceux de 3M, admis aussi en sens vertical.

Sont exposés, en outre, les submultiples du module de base - M/2, M/5 et M/10, sans prévoir M/4.

Une décision par rapport aux submodules M/20, M/50 et M/100 ne subsiste pas encore en Pologne.

D'autre part, M. Blachère souligne que trois dimensions submodulaires - M/4, M/2 et 3M/4 - sont insuffisantes et qu'il faut introduire les submultiples de M/10, même de M/20.

Ce problème - assurément très important - a été abordé par M. Kurent dans sa thèse de doctorat très attentivement et, d'après mon avis, sa proposition sur la gamme des submultiples du module de base, représente une solution admissible.

En comparant les différentes propositions sur le choix des nombres préférenciels, exposé dans cet essai, nous constatons aisément que les séries arithmétiques de raison 2, 3 et 6 sont de rigueur - même dans le "Modulor" transposé. Il reste à voir l'opportunité de leur application pratique.

19 MODULES DE PROJET ET MODULES DE STRUCTURE

Le module de projet - multiple préférenciel du module de base - sert à préciser la densité d'un réseau modulaire (de projét), régulateur des données fonctionnelles et structurales du projet à établir. Généralement, les modules de structure sont multiples du module de projet, accommodés aux murs portants ou aux poteaux selon leur position dans le plan. Un module unique de structure implique l'égalité des distances entre elles.

Le choix des modules de structure en fonction d'un module de projet est laissé au libre arbitre de l'architecte.

En principe, un réseau modulaire de projet est <u>continu</u>. Très souvent, afin de préserver les distances modulaires de projet entre murs portants ou poteaux, on interrompt la continuité du réseau tenant compte de leur dimension. On aboutit, de telle façon, à un réseau modulaire de base si le multiple du module de structure est nombre premier, si non - le réseau modulaire <u>dérivé</u> de projet sera soumis aux facteurs du module de structure.

Voici un exemple. Supposons: $n.M = 1M_n$, module de projet; $p.M_n = p.n.M$, distance entre murs portants (portée du plancher); d, épaisseurs des murs; la distance d'axe en axe des murs suit par addition: $p.M_n + d$; prenant $n = 6M$, $p = 7M$, $d = 2M$, nous aurons:

$$7M_6 + d = 42M + 2M = 44M = 11M_4 = 4M_{11}$$

Les modules dérivés de projet M_4 et M_{11} déterminent la superposition de deux réseaux supplémentaires. On utilisera, sans doute, l'un et l'autre, tant en plan qu'en élévation du bâtiment. Le module de structure M_{44} servira pour le transfert du plan sur place au chantier.

2o DIMENSIONS MODULÉES ET DIMENSIONS SUBMODULAIRES

Une dimension <u>modulée</u> est une dimension fractionnée d'un <u>module de projet n x M</u>, par ex.: $\frac{5M}{3} = 16,67$cm (la hauteur d'une marche d'escalier). D'autre part, une dimension fractionnée du <u>module de base</u> est <u>submodulaire</u> et peut se confondre, en certains cas, avec une dimension modulée.

Le tableau ci-dessous explique les relations entre dimensions modulées et submodulaires:

cm

n	$\frac{10}{n}$	$\frac{20}{n}$	$\frac{30}{n}$	$\frac{40}{n}$	$\frac{50}{n}$	$\frac{60}{n}$
2	5	10	15	20	25	30
3	3,33	6,67	10	13,33	16,67	20
4	2,5	5	7,5	10	12,5	15
5	2	4	6	8	10	12
6	1,67	3,33	5	6,67	8,33	10
8	1,25	2,5	3,75	5	6,25	7,5
10	1	2	3	4	5	6

CONCLUSIONS

Cet essai sur les "Multiples du module de base" est le résultat d'un travail que m'occupe depuis longtemps. Je me suis efforcé de vérifier les prémisses théoriques de la coordination modulaire en les appliquant à mes projets et à ceux des mes élèves. Je suis persuadé que ce système de composition architecturale a contribué à préciser par phases distinctes la successivité dans l'élaboration d'un projet, contrôlée par les multiples du module de base et pondérément rattachés aux réseaux superposés de projet et de structure en plan et en élévation.

Je suis arrivé aux conclusions suivantes:

- la suite des dimensions de 1M à 12M est fondamentale;
- sont admissibles leurs multiples afin de préciser les dimensions des éléments complexes de construction;
- les multiples de 6M forment la suite initiale des dimensions préférées - le nombre 6 joue un rôle prépondérant dans le domaine de la science des proportions;d'autre part, 6M est dimension antropomorphe, égale à deux pieds et, trois fois prise, elle est égale à la hauteur de l'homme;

- en utilisant les dimensions 5M, 6M et 7M, chaque dimension au-dessus de 1oM est réalisable par multiples d'une ou de deux de ces dimensions;
- n'importe quel multiples du module de base peut être pris comme module de projet $n \times M = M_n$ pourvu que ce choix soit raccordé avec les prémisses fonctionnelles et structurales du projet à établir; le module de projet 6M est dimension de préférence;
- par le module de projet est déterminée la densité du quadrillage de référence dans la construction;
- les modules de structure seront toujours multiples du module de projet;
- un quadrillage discontinu, résulté de l'insértion des éléments de structure, entraine des quadrillages supplémentaires, déterminés par les facteurs issus de la dimension additionnée $M_s = p.n.M + d.M = (p.n. + d)M = s.M$; les facteurs de s sont modules de projet dérivés sauf le cas où s est nombre premier;
- les quadrillages supplémentaires continus sont superposées au réseau initial discontinu et servent à l'élaboration ultérieure du projet;
- les cotes du projet seron inscrites en multiples du module de base, les cotes des plans de détail en centimètres.

Belgrade, le 21 août 1961